

کد کنترل

334A



صبح جمعه



جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان بخش آموزش کشور

«علم و تحقیق، کلید پیشرفت کشور است.»  
مقام معظم رهبری (ره)

**آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد ناپیوسته – سال ۱۴۰۵**  
**ریاضی (کد ۱۲۰۸)**

مدت زمان پاسخ‌گویی: ۲۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۱۴۵ سؤال

## عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤال‌ها

| ردیف | مواد امتحانی                                                                                                                                          | تعداد سؤال | از شماره | تا شماره |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|----------|----------|
| ۱    | زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)                                                                                                                          | ۲۵         | ۱        | ۲۵       |
| ۲    | دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال) | ۴۰         | ۲۶       | ۶۵       |
| ۳    | آنالیز ریاضی                                                                                                                                          | ۲۰         | ۶۶       | ۸۵       |
| ۴    | مبانی جبر و مبانی ترکیبیات                                                                                                                            | ۲۰         | ۸۶       | ۱۰۵      |
| ۵    | جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل                                                                                        | ۲۰         | ۱۰۶      | ۱۲۵      |
| ۶    | احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی ۱                                                                                                                   | ۲۰         | ۱۲۶      | ۱۴۵      |

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات کادر زیر، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی جلد دفترچه سؤالات و پایین پاسخنامه ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی):

## PART A: Vocabulary

**Directions:** Choose the word (1), (2), (3), or (4) that best completes each sentence. Then mark the answer on your answer sheet.

- 1- Remember that Instagram is not a good ..... of medical and health-related information.  
1) discovery                      2) source                      3) cause                      4) agreement
- 2- Management says that the person who built the building is ..... for the current problems.  
1) leading                      2) different                      3) surprising                      4) responsible
- 3- The psychologist told him to ..... on the part of the problem that troubled him.  
1) focus                      2) solve                      3) blame                      4) base
- 4- Some of his scenarios are too extreme, but they have the ..... of acknowledging the darkness that lies in all human hearts.  
1) dissipation                      2) omission                      3) advantage                      4) flaw
- 5- You can easily ..... some students to a category, and some students belong to several, and some just sit in the back and all you know is their names.  
1) assign                      2) abdicate                      3) rejoice                      4) falter
- 6- What aggravated his offense was the ..... attitude he exhibited before the jury in the courtroom.  
1) ingenious                      2) defiant                      3) versatile                      4) reverent
- 7- In a video statement, Mr. Comey declared his innocence and welcomed an opportunity to ..... himself in a trial.  
1) obviate                      2) vindicate                      3) repudiate                      4) retaliate

## PART B: Cloze Test

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Modern psychologists have many interests, .....(8) upon different theories and approaches depending on what they are studying. There has been tremendous growth in the topics studied by psychologists .....(9) developments in computers and data analysis. The American Psychological Association currently has 45 divisions, .....(10) representing areas of special interest to psychologists.

- 8- 1) drawing                      2) that draw                      3) draw                      4) who draws
- 9- 1) that part is due to                      2) of which part due to  
3) whose due part into                      4) due in part to
- 10- 1) which                      2) they                      3) each                      4) them

**PART C: Reading Comprehension**

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

**PASSAGE 1:**

No doubt, our judgment of what is mathematics as well as what is valuable in mathematics is based on our notion of the nature and the purpose of mathematics itself. As mathematicians living in a world that is being increasingly mathematized, we want to know where our subject stands with respect to this trend. We want to know what meaning we can give to the mathematics symbols and concepts that are created by human beings. Are they just some more things that we play with? Is mathematics a hierarchically ordered set of fixed statements and static structures or a dynamic system which can be viewed as a process? What is it to know something in mathematics? What sort of meaning is conveyed by mathematical statements?

The unavoidable problems of mathematical practice lead to fundamental questions of the philosophy of mathematics, which in turn help us to see it from many different angles. There are many different ways of looking at mathematics. The different views of it are believed because each one of them corresponds to a certain thing, a view from a certain angle, or an examination with a particular instrument of observation.

- 11- The underlined word “increasingly” in paragraph 1 is closest in meaning to .....  
 1) progressively      2) urgently      3) variably      4) informally
- 12- The underlined word “they” in paragraph 1 refers to .....  
 1) statements      2) human beings  
 3) mathematics      4) symbols and concepts
- 13- All of the following words are mentioned in the passage EXCEPT .....  
 1) calculation      2) notion      3) static      4) certain
- 14- According to paragraph 2, beliefs in different views of mathematics are partly caused by .....  
 1) lack of certainty in mathematical solutions  
 2) unnecessary problems of mathematical practice  
 3) employment of specific tools for observation  
 4) avoidance of the philosophy of mathematics
- 15- According to the passage, which of the following statements is true?  
 1) The sort of meaning that is conveyed by mathematical statements is always quite clear.  
 2) Mathematical symbols and concepts and their meanings are invented by human beings.  
 3) Questions of the philosophy of mathematics deter us from seeing it from different angles.  
 4) Mathematicians are the only ones living in a world that is increasingly mathematized.

**PASSAGE 2:**

Omar Khayyam, born about 1048 and known to us as a poet and philosopher, is better known in the Eastern world as a mathematician, astronomer, and physicist. The solution of cubic equations by the Khayyam method of intersecting conic sections is

very interesting. It can give students greater insight into the geometric nature of conic sections, and by extending Khayyam's method they can find the other real roots, especially the negative values that Khayyam failed to consider. Then, by using modern analytic geometry to analyze the method, students can experience a very concrete example of progress and continuity in mathematical history.

Khayyam's work made an important contribution to the development of algebra. Although he used geometric methods for the solution of cubic equations, he was keenly aware of the limitations of this method. Regretting the lack of a purely algebraic method of solving cubic equations, he admitted, "Neither we, nor any of those who are concerned with algebra have been able to prove this equation—perhaps others who follow us will be able to fill the gap." Others did follow, but not until 470 years later, when Cardano published a purely algebraic solution of cubic equations. Even so, Khayyam made a contribution by systematizing the study of cubic equations and finding geometric solutions for some that had previously remained unsolved. In Khayyam's time, mathematicians made many attempts to solve the cubic equations that arose from the study of optics and from the use of conic sections to solve the classical problems of duplicating the cube and trisecting any angle.

- 16- The underlined word "insight" in paragraph 1 is closest in meaning to ..... .  
 1) timidity 2) ability  
 3) solution 4) perception
- 17- According to paragraph 1, Khayyam ..... .  
 1) employed the intersection of conic sections in order to solve cubic equations  
 2) is much more well-known as a physician in the Eastern world than he is in the West  
 3) used a very concrete example of progress and continuity in mathematical history  
 4) considered some negative values in his method that we usually fail to observe
- 18- According to paragraph 2, regarding the defects of Khayyam's method, ..... .  
 1) they mainly concerned application of geometric methods for solving cubic equations  
 2) he was hardly aware of them and later regretted this lack of awareness in his writings  
 3) they were overcome almost four centuries later when Cardano published his solution  
 4) they constitute a significant contribution to the development of what is known as algebra
- 19- According to the passage, which of the following statements is NOT true?  
 1) Khayyam's contemporaries made numerous attempts at solutions for a variety of cubic equations.  
 2) Khayyam anticipated that with the passage of time mathematicians would be able to cover his shortcomings.  
 3) Khayyam's work provided purely algebraic solutions for cubic equations that had not been solved previously.  
 4) Some of the cubic equations in need of being addressed in Khayyam's time arose from research in optics.
- 20- The passage provides sufficient information to answer which of the following questions?  
 I. What were some of the age-old problems facing mathematicians in Khayyam's time?  
 II. In what year was the Italian mathematician Gerolamo Cardano born?  
 III. Who were some of the most prominent mathematicians living in Khayyam's era?  
 1) Only I 2) Only II  
 3) I and II 4) Only III

**PASSAGE 3:**

By principles of mathematics, we mean a body of propositions which arise in mathematical demonstrations and which serve as premises for deduction. These principles are not proven. In so-called classical mathematics, or more precisely, the classical method of explicating mathematics, which was in current use up until the end of the nineteenth century, three types of mathematical principles were distinguished: the definitions, the axioms and the postulates. [1]

A definition was understood to be a proposition indicating what a given thing is. Thus, for instance, Euclid defined parallels as two straight lines which are located on the same plane, and which when extended to infinity in both directions do not meet in either direction. We will simply point out here that a definition in no way proves the existence of the defined object. [2] Thus, in proposition XXI of Book I of the *Elements*, Euclid proves that parallels exist by demonstrating that one may draw through a point situated outside a straight line another straight line that does not cut the first.

An axiom was understood to be a proposition “evident in itself.” For example: the whole is greater than any of its parts. An axiom, understood in this way, is not provable. [3] The unverifiability of the axiom derives from its very definition. One cannot prove what is evident in itself and constitutes in a way a truth of reason. But it must be pointed out in this regard that the concept of “evidence” is extremely relative. Thus the proposition, which we have just made, was considered as being evident, up until the time when Galileo demonstrated that there were certain objects later called infinite sets—of which a part was as great as the whole. [4]

**21- Which of the following techniques is used in paragraph 2?**

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| 1) Direct quotation | 2) Irony               |
| 3) Exemplification  | 4) Rhetorical question |

**22- According to paragraph 3, regarding the idea that axioms are self-evident, .....**

- 1) it is not provable as yet, since its very definition is in fact derived from the axiom's unverifiability
- 2) it has not yet been proved, since what is evident in itself is in a way at odds with common sense
- 3) the concept of “evidence” is extremely relative only in situations where mathematical axioms are discussed
- 4) it was seriously challenged for the first time when Galileo introduced what was to be later called an infinite set

**23- According to the passage, all of the following are true EXCEPT that .....**

- 1) for Euclid, parallels are two straight lines located on the same plane, and when extended to infinity, they do not meet in any direction
- 2) the so-called classical mathematics, or the classical method of explicating mathematics, was in current use up until the end of the 1900s
- 3) in *Elements*, Euclid demonstrates that we can draw through a point situated outside a straight line another that does not cut the former
- 4) unlike what was thought previously, we are now quite aware of the fact that there are situations in which a part is as great as the whole

- 24- Which of the following statements can best be inferred from the passage?
- 1) The three types of mathematical principles which were distinguished classically correspond to natural elements.
  - 2) Science must set its primary goal as accomplishing a set of principles which are unalterable and true in every condition.
  - 3) Euclid at first proposed to write his famous book entitled *Elements* in order to prove that parallel lines do exist in reality.
  - 4) Scientific principles are not everlasting truth-statements, but rather working definitions that are subject to modification.
- 25- In which position marked by [1], [2], [3] and [4], can the following sentence best be inserted in the passage?
- Its existence is either assumed, as in the case of the point and the line, or demonstrated through the geometric construction of the defined object.
- 1) [1]                      2) [2]                      3) [3]                      4) [4]

دروس پایه (ریاضی عمومی (۱ و ۲)، معادلات دیفرانسیل، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

۲۶- فرض کنید  $P(z)$  یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی،  $P(2-i) = 3-2i$  و  $P(i) = 2$ . مقدار  $|P(2+i) + P(-i)|$  کدام است؟

- (۱)  $\sqrt{29}$
- (۲)  $\sqrt{13}$
- (۳) ۳
- (۴)  $\sqrt{5}$

۲۷- فرض کنید  $f$  یک تابع پیوسته، دو بار مشتق‌پذیر و  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) + 4}{(x-2)^2} = 3$ . مقدار  $f(2) - 2f'(2) + f''(2)$  کدام است؟

- (۱) -۴
- (۲) -۲
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۲۸- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x} & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ . کدام مورد درست است؟

- (۱) تابع  $f$  بر  $[-1, 1]$  انتگرال‌پذیر نیست.
- (۲) تابع  $f$  بر  $[-1, 1]$  ناپیوسته است.
- (۳) تابع  $f$  بر  $[-1, 1]$  پیوسته و بر  $(-1, 1)$  مشتق‌ناپذیر است.
- (۴) تابع  $f$  بر  $(-1, 1)$  مشتق‌پذیر است.

۲۹- مقدار  $\int_1^{\sqrt{3}} \tan^{-1} x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, dx$  کدام است؟

(۱)  $\frac{(4 + \sqrt{3})\pi}{4\sqrt{3}}$

(۲)  $\frac{7\pi}{12}$

(۳)  $\frac{(4 - \sqrt{3})\pi}{4\sqrt{3}}$

(۴)  $\frac{\pi}{12}$

۳۰- فرض کنید  $\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  یک مارپیچ با ضابطه  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$  باشد. مقدار  $\left( \frac{\tau(t)}{\kappa(t)} \right)'$  در

$t = \frac{\pi}{2}$  کدام است؟ ( $\kappa$  و  $\tau$  به ترتیب تاب و انحنای منحنی است).

(۱)  $-\frac{1}{2}$

(۲) صفر

(۳)  $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

۳۱- فرض کنید  $A$  و  $B$  به ترتیب بیانگر سری‌های  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^2$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^2 \frac{1}{n}$  باشند. کدام مورد درست است؟

(۱)  $A$  و  $B$  همگرا هستند.

(۲)  $A$  همگرا و  $B$  واگرا است.

(۳)  $A$  واگرا و  $B$  همگرا است.

(۴)  $A$  و  $B$  واگرا هستند.

۳۲- به ازای کدام مقادیر  $a, b$  ( $a \leq b$ )، مقدار  $\int_a^b (1 - e^{x^2 - x}) \, dx$  ماکزیمم است؟

(۱)  $b = \frac{3}{2}$  و  $a = 0$

(۲)  $b = \frac{1}{2}$  و  $a = 0$

(۳)  $b = 1$  و  $a = \frac{1}{2}$

(۴)  $b = 1$  و  $a = 0$

۳۳- اگر  $C$  خم  $(0 \leq t \leq 1)$ ؛  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{t}}{2} \\ y = \sin^2(\frac{t\pi}{2}) \end{cases}$  باشد، آنگاه مقدار  $\int_C xy^2 dx + x^2 y dy$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $\frac{1}{8}$ (۳)  $\frac{1}{4}$ 

(۴) ۱

۳۴- فرض کنید  $S$  سطح محدود به رویه‌های  $z = 6 - (x^2 + y^2)$  و  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  و  $\hat{n}$  بردار یکه قائم رو به خارج  $S$  باشد.

برای میدان برداری  $\vec{F}(x, y, z) = (e^y + 2x \cos^2 z, 2y \sin^2 z - \tan^{-1} x, 3z - e^y \ln(1 + x^2))$

مقدار  $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$  کدام است؟

(۱)  $\frac{160\pi}{3}$ (۲)  $\frac{145\pi}{3}$ (۳)  $\frac{160\pi}{6}$ (۴)  $\frac{145\pi}{6}$ 

۳۵- دو نیروی  $\vec{F} = e^{yz}(1, xz, xy)$  و  $\vec{G} = e^{xz}(yz, 1, xy)$  را در نظر بگیرید. انتگرال سطح میدان برداری  $\vec{F} \times \vec{G}$

روی سطح کوزه واحد به مرکز مبدأ مختصات و به سمت خارج کدام است؟ (راهنمایی:

$$(\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G})) = \vec{G} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} - \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

(۱)  $4\pi$ (۲)  $\frac{4}{3}\pi$ 

(۳) صفر

(۴)  $-4\pi$ 

۳۶- جواب عمومی معادله دیفرانسیل  $y' = (y + x)^2 + \frac{y}{x}$  کدام است؟

$$\frac{1}{y+x} = \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{y+x} = \frac{c}{x} + \frac{x}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{y-x} = \frac{c}{x} - \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1}{y-x} = \frac{c}{x} + \frac{x}{2} \quad (4)$$

۳۷- اگر جواب معادله دیفرانسیل  $yy'' = (y + y')^2$  به صورت  $y = e^{\int g(x) dx}$  باشد، آنگاه  $g(x)$  کدام است؟

(۱)  $ce^{-2x} - 1$

(۲)  $ce^{-x} - 1$

(۳)  $ce^x - \frac{1}{2}$

(۴)  $ce^{2x} - \frac{1}{2}$

۳۸-  $\{xe^x, \sin x\}$ ، زیرمجموعه‌ای از مجموعه جواب‌های مستقل خطی کدام معادله دیفرانسیل است؟

(۱)  $2y^{(3)} - 2y'' - y' - y = 0$

(۲)  $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 2y'' - 2y' + y = 0$

(۳)  $y^{(4)} - 2y^{(3)} + 2y'' - 2y' + y = 0$

(۴)  $y^{(3)} - 2y'' + 2y' - y = 0$

۳۹- مقدار  $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} \sin t \, dt$  کدام است؟

(۱)  $-1$

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴)  $2$

۴۰- اگر  $y = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{4} + \dots$  سری توانی جواب معادله دیفرانسیل  $xy'' + (\sin x)y' + y = \cos x$  باشد، آنگاه

مقدار  $y^{(3)}(0)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{5}{2}$

(۲)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $-\frac{5}{4}$

(۴)  $-\frac{5}{2}$

۴۱- کدام گزینه نقیض گزاره زیر است؟

«هر ریاضی‌دانی در یکی از گرایش‌های علوم ریاضی تخصص دارد.»

(۱) هیچ ریاضی‌دانی در همه گرایش‌های علوم ریاضی تخصص ندارد.

(۲) هر ریاضی‌دانی در هیچ‌یک از گرایش‌های علوم ریاضی تخصص ندارد.

(۳) ریاضی‌دانی هست که در همه گرایش‌های علوم ریاضی تخصص دارد.

(۴) برخی از ریاضی‌دان‌ها در هیچ‌یک از گرایش‌های علوم ریاضی تخصص ندارند.

۴۲- فرض کنید  $R$  رابطه‌ای در مجموعه  $A$  باشد. کدام گزینه معادل پادمتقارن بودن  $R$  است؟

$$(۱) \quad \forall x, y \in A ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y)$$

$$(۲) \quad \forall x, y \in A ((x, y) \notin R \vee (y, x) \notin R)$$

$$(۳) \quad \forall x, y \in A ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R)$$

$$(۴) \quad \forall x, y \in A (x \neq y \Rightarrow (x, y) \in R \vee (y, x) \in R)$$

۴۳- فرض کنید  $f: A \rightarrow B$  و  $g: B \rightarrow C$  دو تابع باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $\text{gof}$  پوشا باشد، آنگاه  $g$  پوشا است.

(۲) اگر  $\text{gof}$  یک‌به‌یک باشد، آنگاه  $f$  یک‌به‌یک است.

(۳) اگر  $\text{gof}$  یک‌به‌یک باشد آنگاه  $g$  یک‌به‌یک است.

(۴) اگر  $g$  یک‌به‌یک و  $\text{gof}$  پوشا باشد آنگاه  $f$  پوشا است.

۴۴- کدام گزینه نادرست است؟

$$(۱) \quad \mathbb{N}^c = c$$

$$(۲) \quad c^{\mathbb{N}} = c$$

$$(۳) \quad \mathbb{N}^{\mathbb{N}} = c$$

$$(۴) \quad c^{\mathbb{N}} = c \text{ و } c^c > c$$

۴۵- در اثبات کدام گزینه اصل انتخاب ضروری نیست؟

(۱) لم زرن

(۲) هر فضای برداری دارای پایه است.

(۳) هر تابع پوشا وارون راست دارد.

(۴) هر زیرمجموعه نامتناهی و کران دار  $\mathbb{R}$  (زبرینه) سوپریمم دارد.

۴۶- اگر بردارهای  $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ -x \end{bmatrix}$ ,  $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 2x+1 \end{bmatrix}$  از یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی، مستقل خطی باشند، آنگاه مقدار  $x$  می‌تواند...

(۱) هر عدد حقیقی باشد.

(۲) هر عدد حقیقی باشد به جز  $-\frac{1}{2}$

(۳) هر عدد حقیقی باشد به جز  $-1$

(۴) هر عدد حقیقی باشد به جز  $-1$  و  $-\frac{1}{2}$

۴۷- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی  $2 \times 2$  با درایه‌های حقیقی باشند، به‌طوری‌که  $(AB)^2 = 0$ ، که در آن  $0$  ماتریس صفر

$2 \times 2$  می‌باشد، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱)  $\det(BA)^2 \neq 0$

(۲)  $(BA)^2 = 0$

(۳)  $(BA)^2 B \neq A(BA)^2$

(۴)  $\text{tr}(BA)^2 \neq 0$

۴۸- فرض کنید  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  با درایه‌های حقیقی باشد. اگر رتبه‌ی ستونی  $A$  برابر با ۱ باشد و  $\text{tr}(A) = 5$ ، آنگاه  $\text{tr}(A^2)$  برابر است با:

- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۲۵ (۴) ۶۲۵

۴۹- برای اعداد مثبت  $x$  و  $y$  و  $z$  حاصل دترمینان

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_x^y & \log_x^z \\ \log_y^x & 3 & \log_y^z \\ \log_z^x & \log_z^y & 5 \end{vmatrix}$$

برابر با کدام است؟

(۱) صفر

(۲) ۱۵

(۳) ۸

(۴)  $\log_x^y \log_y^z \log_z^x$

۵۰- اگر  $A$  و  $B$  ماتریس‌های  $n \times n$  با درایه‌های حقیقی باشند و چنانچه ماتریس  $A$  وارون‌پذیر (نامنفرد) باشد، آنگاه کدام مورد نادرست است؟

(۱) ماتریس‌های  $(A^{-1}B)^2$  و  $(BA^{-1})^2$  مقادیر ویژه یکسان ندارند.

(۲) ماتریس‌های  $A^{-1}B$  و  $BA^{-1}$  مقادیر ویژه یکسان دارند.

(۳) ماتریس‌های  $B$  و  $A^{-1}BA$  مقادیر ویژه یکسان دارند.

(۴) ماتریس‌های  $AB$  و  $BA$  رتبه یکسان دارند.

۵۱- فرض کنید  $\{a_n\}$  و  $\{b_n\}$  دو دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشند. از کدام مورد همگرایی سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  نتیجه می‌شود؟

(۱)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}$

(۲)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} \in \mathbb{R}$  و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  همگرا است.

(۳)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}$

(۴)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty$  و سری  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  همگرا است.

۵۲- فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد حقیقی است،  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ،  $\alpha = \sup A$  و  $\beta = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  که

$\alpha, \beta \in (-\infty, \infty]$  کدام مورد نادرست است؟

(۱) اگر  $\alpha \notin A$ ، آنگاه  $\alpha = \beta$ .

(۲) اگر  $\{a_n\}$  صعودی باشد، آنگاه  $\alpha = \beta$ .

(۳) اگر  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، آنگاه  $(\beta, \alpha) \cap A$  مجموعه‌ای متناهی است.

(۴) اگر  $\alpha = \beta$ ، آنگاه  $\{a_n\}$  دارای زیردنباله‌ای صعودی است.

۵۳- فرض کنید  $\{a_n\}$  دنباله‌ای از اعداد مثبت متمایز باشد که سری  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  واگرا و  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$  حاصل جمع جزئی

سری است. کدام مورد درست است؟

(۱)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$  واگرا است ولی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$  همگرا است.

(۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$  همگرا است ولی  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$  واگرا است.

(۳) هر دو سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$  همگرا است.

(۴) هر دو سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$  واگرا است.

۵۴- کدام مورد درباره تابع حقیقی  $f$  درست است؟

(۱) اگر  $f$  بر  $\mathbb{R}$  پیوسته و کراندار باشد، آنگاه  $f$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت پیوسته است.

(۲) اگر  $f$  بر  $[1, \infty)$  پیوسته و یکنوا باشد، آنگاه تابع  $g(x) = xf(x)$  بر  $[1, \infty)$  یکنواخت پیوسته است.

(۳) اگر  $f$  بر بازه باز و کراندار  $(a, b)$  پیوسته و کراندار باشد، آنگاه  $f$  بر  $(a, b)$  یکنواخت پیوسته است.

(۴) اگر تابع  $f$  بر  $[1, \infty)$  پیوسته و کراندار باشد، آنگاه تابع  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  بر  $[1, \infty)$  یکنواخت پیوسته است.

۵۵- اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته باشد، کدام مورد درست است؟

(۱) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  کراندار باشد، آنگاه  $\overline{f(E)}$  فشرده است.

(۲) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  همبند و بسته باشد، آنگاه  $\overline{f(E)}$  فشرده است.

(۳) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  همبند نباشد، آنگاه  $f(E)$  نیز همبند نیست.

(۴) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  فشرده نباشد، آنگاه  $f(E)$  نیز فشرده نیست.

۵۶- مکعب مستطیلی به ابعاد  $x < y < z$  (برحسب واحد طول) مفروض است. اگر محاسبه در یک دستگاه ممیز شناور

با دقت  $\delta$  صورت پذیرد، آنگاه کدام عبارت درست است؟

(۱) دقت محاسبه حجم و مساحت کل مکعب مستطیل از  $\delta$  کمتر است.

(۲) دقت محاسبه حجم و مساحت کل مکعب مستطیل، به ترتیب از  $2\delta$  و  $3\delta$  کمتر است.

(۳) دقت محاسبه حجم و مساحت کل مکعب مستطیل به ترتیب از  $\frac{1}{3}\delta$  و  $\frac{1}{4}\delta$  کمتر است.

(۴) دقت محاسبه حجم و مساحت کل مکعب مستطیل، به ترتیب از  $3\delta$  و  $2\delta$  کمتر است.

۵۷- از روش دوبخشی (تئسیف) برای یافتن ریشه معادله  $(x^2 - 2)^3 = 0$  در بازه  $[0, 2]$  استفاده می‌کنیم. پس از انجام ۴ تکرار، مقدار تقریبی ریشه کدام است؟

(۱)  $1/125$

(۲)  $1/375$

(۳)  $1/4142$

(۴)  $1/4375$

۵۸- فرض کنید  $P(x)$  چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی  $\{(n, 2^n) : n = 0, 1, 2, 3, 4\}$  باشد. ضریب  $x$  در  $P(x)$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $\frac{5}{12}$

(۳)  $\frac{7}{12}$

(۴) ۱

۵۹- فرض کنید  $P_1(x)$  چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی  $A = \{(1, 2), (-1, 1), (3, 4), (0, 1)\}$  و  $P_2(x)$  چند

جمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی  $B = \{(-1, 1), (3, 4), (0, 1), (4, 3)\}$  باشند. اگر  $P_1(2) = \frac{13}{4}$  و  $P_2(2) = \frac{17}{5}$ ،

آنگاه مقدار چندجمله‌ای درون‌یاب تابع جدولی  $A \cup B$  در  $x = 2$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{31}{30}$

(۲)  $-\frac{31}{30}$

(۳)  $\frac{33}{10}$

(۴)  $-\frac{33}{10}$

$$\frac{4f(x + \frac{h}{2}) - f(x + h) - 3f(x)}{h}$$

۶۰- فرض کنید  $f$  یک تابع با مشتق پیوسته مرتبه ۴ باشد. برای تقریب  $f'(x)$  از دستور

استفاده می‌کنیم. اگر خطای تقریب به صورت  $ch^n$  باشد، آنگاه مقدار  $n$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۶۱- در جعبه‌ای ۳ مهره سفید و هم‌چنین ۳ مهره سیاه قرار دارند. مهره‌ها را یک‌به‌یک و بدون جای‌گذاری انتخاب می‌کنیم تا همه مهره‌های هم‌رنگ سیاه یا همه مهره‌های هم‌رنگ سفید انتخاب شوند. احتمال این که این رویداد در انتخاب چهارم رخ دهد، چقدر است؟

$$\frac{2}{10} \quad (1)$$

$$\frac{3}{10} \quad (2)$$

$$\frac{4}{10} \quad (3)$$

$$\frac{1}{10} \quad (4)$$

۶۲- کارگری در سه شیفت کاری مختلف به ترتیب ۲۰ و ۱۵ و ۳۰ قطعه در ساعت تولید می‌کند. اگر زمان کاری هر سه شیفت برابر باشد، میانگین تولید ساعتی این کارگر چقدر است؟

$$22 \quad (1)$$

$$20/67 \quad (2)$$

$$20 \quad (3)$$

$$21/67 \quad (4)$$

۶۳- فرض کنید  $P(A) = P(B) = 0/6$  و  $P(A|B) = 0/8$  باشد. مقدار  $P(A|B')$  کدام است؟

$$0/12 \quad (1)$$

$$0/3 \quad (2)$$

$$0/48 \quad (3)$$

$$0/7 \quad (4)$$

۶۴- روز تولد مینا ۲۱ مهر است. احتمال این که چهارمین نفر که مینا در مدرسه با او ملاقات می‌کند، نخستین نفری باشد که تولدش ۲۱ مهر است، چقدر است؟ (تعداد روزهای سال را ۳۶۵ روز بگیرید، شانس تولد در روزهای مختلف سال برای همه یکسان است.)

$$\frac{(364)^3}{(365)^4} \quad (1)$$

$$\left(\frac{364}{365}\right)^4 \quad (2)$$

$$\left(\frac{364}{365}\right)^3 \quad (3)$$

$$\frac{(364)^3 \cdot 363}{(365)^4} \quad (4)$$

۶۵- اگر در یک مجموعه داده، میانگین و میانه با هم برابر باشند، کدام مورد همواره درست است؟

- (۱) مد داده‌ها نیز حتماً با میانگین و میانه برابر است. (۲) داده‌ها دارای چولگی به چپ (منفی) هستند.  
(۳) داده‌ها دارای چولگی به راست (مثبت) هستند. (۴) ضریب چولگی صفر است.

آنالیز ریاضی:

۶۶- اگر  $(X, d)$  یک فضای متریک باشد و  $A \subseteq X$ ، کدام گزینه درست است؟  $(A')$  مجموعه نقاط حدی  $A$  و  $\partial A$  مرز  $A$  است.

(۱) اگر  $A \cap A' = \emptyset$  آنگاه  $A' \subseteq \partial A$ .

(۲) اگر  $A \cap A' = \emptyset$  آنگاه  $\partial A \subseteq A'$ .

(۳) اگر  $A$  ناشمارا باشد آنگاه  $A' \neq \emptyset$ .

(۴) اگر  $A$  ناتهی و متناهی باشد آنگاه  $\partial A \neq \emptyset$ .

۶۷- فرض کنید  $X$  یک فضای متریک باشد و  $A \subseteq X$ . گزاره  $x \in \bar{A}$  با کدام گزینه معادل است، که در آن  $\bar{A}$  بستار  $A$  است؟

(۱)  $x$  یک نقطه مرزی  $A$  است.

(۲)  $x$  یک نقطه انباشتگی (حدی)  $A$  است.

(۳) دنباله‌ای از نقاط  $A$  مانند  $\{x_n\}$  وجود دارد به طوری که  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

(۴)  $x \in A' \cup \partial A$ ، که  $\partial A$  مجموعه نقاط مرزی و  $A'$  مجموعه نقاط انباشتگی (حدی)  $A$  است.

۶۸- فرض کنید  $X$  یک فضای متریک باشد و  $E \subseteq X$ . گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

الف - اگر  $E$  فشرده باشد و  $E' \cap E = \emptyset$ ، آنگاه  $E$  متناهی است.

ب -  $E' \setminus E$  درون تهی دارد.

کدام گزینه درست است؟

(۱) «الف» و «ب» درست هستند.

(۲) «الف» درست و «ب» نادرست است.

(۳) «الف» نادرست و «ب» درست است.

(۴) «الف» و «ب» نادرست هستند.

۶۹- همگرایی دنباله‌ها در فضای متریک  $(X, d)$  با کدام متریک  $d'$  روی  $X$  معادل نیست؟

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + 2d(x, y)} \quad (۱)$$

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad (۲)$$

$$d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\} \quad (۳)$$

$$d'(x, y) = d(f(x), f(y)) \quad (۴) \text{ که در آن } f \text{ تابعی دوسویی روی } X \text{ است.}$$

۷۰- مجموعه اعداد حقیقی را با متریک زیر در نظر می‌گیریم. کدام مجموعه باز است؟

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$$\mathbb{Q} \quad (۱)$$

$$\mathbb{Q}^c \quad (۲)$$

$$(-1, 0] \quad (۳)$$

$$[-2, -1] \cup \{0\} \quad (۴)$$

۷۱- فرض کنید  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  و اگر  $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ ، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر  $A$  باز و ناتهی و  $B$  در  $\mathbb{R}^n$  چگال باشد، آنگاه  $A + B = \mathbb{R}^n$ .

(۲) اگر  $A$  و  $B$  فشرده باشند، آنگاه  $A + B$  فشرده است.

(۳) اگر  $A$  بسته و  $B$  باز باشد، آنگاه  $A + B$  باز است.

(۴) اگر  $A$  و  $B$  بسته باشند، آنگاه  $A + B$  بسته است.

۷۲- فرض کنید  $(X, d)$  یک فضای متریک و  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌های ناتهی، مجزا و بسته از  $X$  باشند. اگر تابع

$$f: X \rightarrow [0, 1] \text{ با ضابطه } f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

(۱)  $f$  تابعی پوشا است.

(۲)  $f$  تابعی پیوسته است.

(۳)  $f^{-1}(\{0\}) = A$  و  $f^{-1}(\{1\}) = B$ .

(۴) اگر  $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} > 0$ ، آنگاه  $f$  یکنواخت پیوسته است.

۷۳- فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک و  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته و دوسویی باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $E \subseteq X$  کامل (perfect) باشد، یعنی بسته باشد و هر نقطه  $E$  یک نقطه حدی  $E$  باشد، آنگاه  $f(E) \subseteq Y$  کامل است.

(۲) اگر  $E \subseteq X$  چگال باشد، آنگاه  $f(E) \subseteq Y$  چگال است.

(۳) اگر  $X$  کامل (Complete) باشد، آنگاه  $Y$  کامل است.

(۴) اگر  $E \subseteq X$  و  $\partial E = \emptyset$ ، آنگاه  $\partial(f(E)) = \emptyset$  که در آن  $\partial E$  مرز مجموعه  $E$  است.

۷۴- فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک فشرده و  $f: X \rightarrow Y$  تابعی دوسویی است. کدام گزینه معادل پیوستگی  $f$  نیست؟

(۱) اگر  $A \subseteq X$  باز باشد، آنگاه  $f(A) \subseteq Y$  باز است.

(۲) اگر  $A \subseteq X$  بسته باشد، آنگاه  $f(A) \subseteq Y$  بسته است.

(۳) اگر  $X$  همبند باشد، آنگاه  $f(A) \subseteq Y$  همبند است.

(۴) اگر  $\{x_n\}$  دنباله همگرا در  $X$  باشد، آنگاه  $\{f(x_n)\}$  دنباله همگرا در  $Y$  است.

۷۵- تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  و مجموعه  $\{f\}$  در  $a$  پیوسته نیست ولی در  $a$  حد دارد:  $A = \{a \in [0, 1] : \text{حد دارد}\}$  را در نظر می‌گیریم.

کدام گزینه دربارهٔ مجموعه  $A$  درست است؟

(۱) همبند است.

(۲) حداکثر شمارا است.

(۳) زیرمجموعه بازی از  $[0, 1]$  است.

(۴) زیرمجموعه بسته‌ای از  $[0, 1]$  است.

۷۶- فرض کنید  $X, Y, Z$  فضاهای متریک،  $g: Y \rightarrow Z$  تابعی پیوسته و یک‌به‌یک،  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع و  $h = g \circ f$

یکنواخت پیوسته باشد. کدام گزینه پیوستگی یکنواخت  $f$  را نتیجه می‌دهد؟

(۱)  $X$  و  $Z$  فشرده باشد.

(۲)  $Z$  فشرده باشد.

(۳)  $X$  فشرده باشد.

(۴)  $Y$  فشرده باشد.

۷۷- فرض کنید  $Y = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$  و  $X = \mathbb{Q}$  مجهز به متر اقلیدسی و تابع  $f: X \rightarrow Y$  یکنواخت پیوسته

باشد. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) تابع  $f$  یکنوا است.

(۲)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  موجود است.

(۳) تابع  $f$  هر مجموعه باز را به یک مجموعه باز می‌نگارد.

(۴) تابع  $f$  هر مجموعه بسته را به یک مجموعه بسته می‌نگارد.

۷۸- برای تابع  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  کدام گزینه درباره مجموعه  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$  درست است؟

(۱) اگر  $G_f$  در  $\mathbb{R}^2$  همبند باشد آنگاه  $f$  پیوسته است.

(۲) اگر  $G_f$  در  $\mathbb{R}^2$  بسته باشد آنگاه  $f$  پیوسته است.

(۳) اگر  $f$  پیوسته باشد آنگاه  $G_f$  در  $\mathbb{R}^2$  فشرده است.

(۴) اگر  $f$  پیوسته باشد آنگاه  $G_f$  در  $\mathbb{R}^2$  بسته است اما لزوماً فشرده نیست.

۷۹- فرض کنید تابع ناصفر  $f_0$  بر بازه  $[0,1]$  پیوسته باشد و  $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t) dt$  ( $0 \leq x \leq 1, n = 1, 2, \dots$ ) کدام

گزینه درباره همگرایی دنباله توابع  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  بر  $[0,1]$  درست است؟

(۱) یکنواخت همگرا به  $f_0$  است.

(۲) یکنواخت همگرا به صفر است.

(۳) همگرایی به ضابطه تابع  $f_0$  بستگی دارد.

(۴) نقطه‌وار همگرا است ولی یکنواخت همگرا نیست.

۸۰- فرض کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $f_n: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f_n(x) = \text{Arctg}(nx)$  تعریف شده است. کدام

گزینه درباره دنباله  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  بر  $(0, \infty)$  درست است؟

(۱) نقطه‌وار همگرا نیست.

(۲) یکنواخت همگرا است.

(۳) نقطه‌وار همگرا است ولی بر هیچ بازه  $[a, b]$  که  $0 < a < b < \infty$ ، یکنواخت همگرا نیست.

(۴) نقطه‌وار همگرا است و یکنواخت همگرا نیست، ولی بر هر بازه  $[a, b]$  که  $0 < a < b < \infty$ ، یکنواخت همگرا است.

۸۱- کدام تابع بر  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است؟

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \quad (1)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{4^n} \quad (2)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{2n}} \quad (3)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left| x - \frac{1}{n} \right|}{4^n} \quad (4)$$

۸۲- مقدار سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_1^2 \frac{x}{(1+x)^n} dx \right)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴)  $\infty$

۸۳- فرض کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $f_n$  بر  $[0, 1]$  پیوسته باشد و  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  بر  $(0, 1)$  یکنواخت همگرا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$  ممکن است و اگر باشد.

(۲)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$  همگرا است ولی ممکن است  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  در نقطه ۱ پیوسته نباشد.

(۳)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$  همگرا است ولی ممکن است  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  بر  $[0, 1]$  یکنواخت همگرا نباشد.

(۴)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(1)$  همگراست و  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  بر  $[0, 1]$  یکنواخت همگرا است.

۸۴- دنباله توابع  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  بر  $\mathbb{R}$  به صورت  $f_n(x) = \max\{0, 1 - |x - n|\}$  تعریف می شود. کدام گزینه درباره دنباله  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  نادرست است؟

(۱) یکنواخت همگرا به صفر نیست ولی زیر دنباله ای دارد که یکنواخت همگرا به صفر است.

(۲) نقطه وار همگرا به صفر است ولی  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx \neq 0$ .

(۳) بر  $\mathbb{R}$  یکنواخت کراندار است.

(۴) بر  $\mathbb{R}$  هم پیوسته است.

۸۵- فرض کنید به ازای هر  $n \in \mathbb{N}$  تابع  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f_n(x) = \ln \frac{nx+1}{nx+2}$  تعریف شده است. کدام گزینه درباره دنباله  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  و بازه های  $I = [0, 1]$  و  $J = [1, \infty)$  درست است؟

(۱)  $\{f_n\}$  بر هر دو  $I$  و  $J$  هم پیوسته است.

(۲)  $\{f_n\}$  بر هیچ یک  $I$  و  $J$  هم پیوسته نیست.

(۳)  $\{f_n\}$  بر  $I$  هم پیوسته است ولی بر  $J$  هم پیوسته نیست.

(۴)  $\{f_n\}$  بر  $J$  هم پیوسته است ولی بر  $I$  هم پیوسته نیست.

مبانی جبر و مبانی ترکیبیات:

۸۶- فرض کنید  $G = \mathbb{Z}_{48}$  و  $H = \langle 4 \rangle$  و  $K = \langle 6 \rangle$ . در این صورت مرتبه زیرگروه  $HK$  کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۸

(۳) ۱۲

(۴) ۲۴

۸۷- فرض کنید  $\mathbb{F}$  یک میدان دلخواه و  $R = M_2(\mathbb{F})$  حلقه ماتریس‌های  $2 \times 2$  روی  $\mathbb{F}$  باشد. در این صورت کدام گزینه

در مورد  $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F} \right\}$  درست است؟

(۱)  $I$  یک ایده‌آل راست  $R$  است ولی  $I$  یک ایده‌آل چپ  $R$  نیست.

(۲)  $I$  هم یک ایده‌آل راست  $R$  و هم یک ایده‌آل چپ  $R$  است.

(۳)  $I$  نه یک ایده‌آل راست  $R$  و نه یک ایده‌آل چپ  $R$  است.

(۴)  $I$  یک ایده‌آل راست  $R$  نیست ولی  $I$  یک ایده‌آل چپ  $R$  است.

۸۸- همریختی  $f$  از  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$  به  $\mathbb{Z}_4$  با ضابطه  $f(a, b) = 2a + 2b$  تعریف شده است. در این صورت تعداد اعضای هسته  $f$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ۸

۸۹- کدام گزینه درست است؟

(۱) تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Z}[x]$  و  $\mathbb{Q}[x]$  اصلی هستند.

(۲) تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Z}[x]$  اصلی هستند ولی تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Q}[x]$  لزوماً اصلی نیستند.

(۳) تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Z}[x]$  لزوماً اصلی نیستند ولی تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Q}[x]$  اصلی هستند.

(۴) تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Z}[x]$  لزوماً اصلی نیستند و تمام ایده‌آل‌های  $\mathbb{Q}[x]$  نیز لزوماً اصلی نیستند.

۹۰- فرض کنید  $G = \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$  و  $f$  یک خودریختی  $G$  باشد به طوری که  $f((0, 1)) = (0, 3)$  و  $f((1, 0)) = (1, 0)$ . در این صورت  $f((1, 3))$  کدام است؟

(۱)  $(0, 2)$ (۲)  $(1, 1)$ (۳)  $(1, 3)$ (۴)  $(0, 3)$ 

۹۱- در کدام یک از گزینه‌های زیر،  $G$  حداقل دو زیرگروه ماکسیمال با تعداد اعضای برابر دارد که یکی از آن‌ها آبلی و دیگری غیر آبلی است؟

(۱)  $G = S_3 \times \mathbb{Z}_3$ (۲)  $G = Q_8 \times \mathbb{Z}_3$ (۳)  $G = D_8 \times \mathbb{Z}_5$ (۴)  $G = S_3 \times \mathbb{Z}_5$

۹۲- گروه  $G = \frac{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}}{\langle (0, 3) \rangle}$  با کدام یک از گروه‌های زیر یکرخت است؟

(۱)  $D_9$

(۲)  $S_3 \times \mathbb{Z}_3$

(۳)  $\mathbb{Z}_{18}$

(۴)  $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$

۹۳- فرض کنید  $H$  زیرگروهی از  $S_{10}$  باشد که توسط دو جایگشت  $a = (4 \ 6 \ 8 \ 10)$  و  $b = (3 \ 5 \ 7)$  تولید شده است. در این صورت  $Z(H)$  چند عضوی است؟

(۱) ۱۲

(۲) ۴

(۳) ۳

(۴) ۱

۹۴- در حلقه  $R = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  فرض کنید  $I = \langle x_1^2, x_2^3, x_3^4, \dots \rangle$ . اگر  $S = \frac{R}{I}$  و  $J = \langle x_1 + I, x_2 + I, \dots \rangle$ .

آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱)  $J$  یک ایده‌آل پوچ و پوچ‌توان  $S$  است.

(۲)  $J$  یک ایده‌آل پوچ  $S$  است ولی پوچ‌توان نیست.

(۳)  $J$  نه یک ایده‌آل پوچ و نه یک ایده‌آل پوچ‌توان  $S$  است.

(۴)  $J$  یک ایده‌آل پوچ  $S$  نیست ولی یک ایده‌آل پوچ‌توان  $S$  است.

۹۵- حلقه  $\frac{\mathbb{Z}_5[x]}{\langle x^3 - 1 \rangle}$  چند مقسوم‌علیه صفر (غیر صفر) دارد؟

(۱) صفر

(۲) ۲۴

(۳) ۲۸

(۴) ۳۰

۹۶- تعداد اعداد صحیح بین ۱ تا ۹۹۹,۹۹۹ که مجموع ارقام آن‌ها عددی زوج باشد، برابر است با .....

(۱) ۴۵۰,۰۰۰

(۲) ۴۹۹,۹۹۹

(۳) ۵۰۰,۰۰۰

(۴) ۵۵۵,۵۵۵

۹۷- چند عدد شش رقمی با سه رقم زوج و سه رقم فرد وجود دارد؟

(۱) ۳۱,۲۵۰

(۲) ۱۲۵,۰۰۰

(۳) ۲۸۱,۲۵۰

(۴) ۳۱۲,۵۰۰

۹۸- تعداد مثلث‌هایی که طول اضلاع آن‌ها اعداد صحیح باشند و محیط برابر با ۴۰ داشته باشند، برابر است با .....

(۱) ۱۱

(۲) ۲۲

(۳) ۳۳

(۴) ۴۴

۹۹- ضریب  $x^{۵۳}$  در بسط  $\sum_{m=0}^{۱۰۰} \binom{۱۰۰}{m} (x-۳)^{۱۰۰-m} \cdot ۲^m$  برابر است با .....

(۱)  $-\binom{۱۰۰}{۵۳}$  (۲)  $-\binom{۱۰۰}{۴۷}$

(۳)  $\binom{۱۰۰}{۴۷}$  (۴)  $\binom{۱۰۰}{۵۳}$

۱۰۰- اگر جمله دوم در بسط  $\left(\sqrt[۳]{a} + \frac{a}{\sqrt{a-1}}\right)^n$  وقتی  $a \neq ۰$ ، برابر با  $۱۴a^{\frac{۵}{۲}}$  باشد، مقدار  $\frac{\binom{n}{۳}}{\binom{n}{۲}}$  برابر است با .....

(۱) ۱۲

(۲) ۶

(۳) ۳

(۴) ۴

۱۰۱- به چند طریق می‌توان از بین  $۲n$  عدد صحیح متوالی، ۳ عدد را طوری انتخاب کرد که مجموع آن‌ها بر ۳ بخش پذیر باشد؟

(۱)  $\frac{n}{۲}(n^۲ - ۳n + ۲)$  (۲)  $\frac{n}{۳}(۴n^۲ - ۳n + ۲)$

(۳)  $\frac{n}{۶}(۷n^۲ - ۳n + ۲)$  (۴)  $\frac{n}{۲}(۳n^۲ - ۳n + ۲)$

۱۰۲- به چند طریق می‌توان از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰ سه عدد انتخاب کرد به طوری که حاصل جمع آن‌ها زوج باشد؟

(۱) ۱,۵۷۵

(۲) ۲,۰۳۰

(۳) ۲,۱۷۵

(۴) ۴۵۵

۱۰۳- اگر  $(1+۲x+۳x^۲)^{۱۰} = a_0 + a_1x + a_2x^۲ + \dots + a_{۲۰}x^{۲۰}$ ، آنگاه  $a_1$  برابر است با .....

(۱) ۴۲۰

(۲) ۲۱۰

(۳) ۲۰

(۴) ۱۰

۱۰۴- حاصل جمع اعداد چهار رقمی حاصل از تمام جایگشت‌های ممکن ارقام ۱, ۲, ۳, ۴ برابر است با .....

(۱) ۲,۵۶۰

(۲) ۱۱,۱۱۰

(۳) ۲۶,۶۶۴

(۴) ۶۶,۶۶۰

۱۰۵- حاصل جمع  $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \frac{\binom{n}{2}}{3} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$  برابر است با .....

(۱)  $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

(۲)  $\frac{2^n-1}{n+1}$

(۳)  $\frac{2^{n+1}+1}{n+1}$

(۴)  $\frac{2^n+1}{n+1}$

جبر خطی عددی، بهینه‌سازی خطی و نظریه مقدماتی معادلات دیفرانسیل:

۱۰۶- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & -5 \\ 8 & 3 & -10 \end{bmatrix}$ . مقدار  $\frac{\|A\|_1}{\|A\|_\infty}$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{3}$

(۲)  $\frac{17}{21}$

(۳)  $\frac{21}{17}$

(۴) ۳

۱۰۷- کدام ماتریس زیر را می‌توان به روش تجزیه دولیتل به صورت LU، نوشت، که L یک ماتریس پایین

مثلثی و U یک ماتریس بالا مثلثی باشد؟

(۲)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(۱)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(۴)  $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

(۳)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

۱۰۸- فرض کنید  $Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & Q_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ Q_{31} & 0 & Q_{33} \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس متعامد و  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 10 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ . اگر  $A = QB$  و  $B_{13} = 0$ .

آنگاه مقدار  $|Q_{31}|$  کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

$$\frac{4}{\sqrt{17}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (4)$$

۱۰۹- فرض کنید به روش تجزیه LU که L یک ماتریس پایین مثلثی با درایه‌های قطری یک و U یک ماتریس بالا مثلثی است، تساوی زیر برقرار باشد. مقدار  $U_{22}$  کدام است؟

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 & 5 \\ 7 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = LU$$

$$\frac{7}{4} \quad (1)$$

$$\frac{27}{8} \quad (2)$$

$$6 \quad (3)$$

$$\frac{31}{4} \quad (4)$$

۱۱۰- فرض کنید  $A_{n \times n} = L + D + U$  که در آن D یک ماتریس قطری نامنفرد و L و U به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی با عناصر قطری صفر باشند. برای حل دستگاه معادلات  $Ax_{n \times 1} = b_{n \times 1}$  از دستور بازگشتی  $x^{(m+1)} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^{(m)}$  استفاده می‌کنیم. شرط کافی برای همگرایی دنباله تکراری کدام است؟

$$L = U^T \quad (1)$$

$$\|L + U\| < \|D\| \quad (2)$$

$$\|D^{-1}(L + U)\|_{\infty} < 1 \quad (3)$$

$$\|D^{-1}(L + U)\|_1 < 1 \quad (4)$$

۱۱۱- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  مفروض است. با انتخاب بردار آغازین  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  تقریب مقدار ویژه بزرگ‌تر ماتریس A در اولین تکرار روش تکرار توانی، کدام است؟

$$\frac{54}{13} \quad (1)$$

$$\frac{67}{29} \quad (2)$$

$$\frac{133}{29} \quad (3)$$

$$\frac{108}{13} \quad (4)$$

۱۱۲- جواب مسأله کمترین مربعات متناظر با دستگاه معادلات  $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$ ، در کدام معادله صدق می‌کند؟

$$x + 2y = 3/25 \quad (1)$$

$$x + 2y = 3/4 \quad (2)$$

$$x + 2y = 3/5 \quad (3)$$

$$x + 2y = 3/6 \quad (4)$$

۱۱۳- یک شرکت برای سه دوره متوالی، تولید یک محصول را برنامه‌ریزی می‌کند. تقاضاهای دوره‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب ۴۰، ۶۰ و ۵۰ واحد است. هزینه تولید هر واحد محصول ۵ واحد و هزینه نگهداری هر واحد محصول در انبار از یک دوره به دوره بعد ۲ واحد است. اگر  $x_t$  تولید دوره  $t$  و  $i_t$  موجودی پایان دوره  $t$  باشد، آنگاه کدام مورد محدودیت تعادل موجودی برای پایان دوره ۲ را نمایش می‌دهد؟

$$i_2 = i_1 + x_1 + x_2 - 100 \quad (1)$$

$$i_2 = i_1 + x_1 + x_2 - 60 \quad (2)$$

$$i_2 = i_1 + x_2 - 100 \quad (3)$$

$$i_2 = i_1 + x_2 - 60 \quad (4)$$

۱۱۴- مجموعه چندوجهی بی‌کران  $S = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax \geq b\}$  مفروض است. اگر بردار  $b$  به  $b'$  تغییر یابد و مجموعه جدید ناتهی  $S'$  حاصل شود، آنگاه کدام مورد درست است؟

(۱)  $S'$  کراندار است.

(۲)  $S'$  بی‌کران است.

(۳) فقط اگر  $b' < b$ ، آنگاه  $S'$  کراندار است.

(۴) در مورد کراندار یا بی‌کران بودن  $S'$  نمی‌توان نظر داد.

- ۱۱۵- یکی از تکرارهای جدول سیمپلکس برای یک مسئله برنامه‌ریزی خطی به صورت زیر است. بردار سمت راست (b) در مسئله اصلی کدام است؟ ( $s_1$  و  $s_2$  به ترتیب متغیر کمکی محدودیت‌های اول و دوم مسئله‌اند).

|       | z | $x_1$         | $x_2$ | $s_1$          | $s_2$ | RHS  |
|-------|---|---------------|-------|----------------|-------|------|
| z     | ۱ | -۱۵           | ۰     | ۲۵             | ۰     | ۱۰۰۰ |
| $x_2$ | ۰ | $\frac{1}{2}$ | ۱     | $\frac{1}{2}$  | ۰     | ۲۰   |
| $s_2$ | ۰ | $\frac{5}{2}$ | ۰     | $-\frac{3}{2}$ | ۱     | ۶۰   |

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 60 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 120 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix} \quad (4)$$

- ۱۱۶- دستگاه استاندارد (P) به صورت زیر مفروض است:

$$(P): Ax = b, x \geq 0.$$

فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  متغیرهای این دستگاه و  $a_1, \dots, a_n$  ستون‌های ماتریس A هستند. اگر  $x^0$  یک جواب پایه‌ای شدنی (جواب موجه اساسی) برای دستگاه (P) با پایه  $B = [a_2, a_4, a_1]$  باشد و  $y_j = B^{-1}a_j$ ، آنگاه  $y_2$  کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

- ۱۱۷- در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی مینیمم‌سازی، بردار ضرایب تابع هدف  $C = (1, -2, 1)$  و نقاط رأسی  $x^1 = (1, 1, 0)^t$ ،  $x^2 = (0, 1, 1)^t$  و  $x^3 = (2, 1, 2)^t$  هستند. همچنین جهت‌های دورشونده رأسی  $d^1 = (1, 1, 1)^t$ ،  $d^2 = (4, 3, 2)^t$  و  $d^3 = (4, 3, 4)^t$  است. مجموعه جواب‌های بهینه مسئله کدام است؟ (t نماد ترانهاده است).

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \mu_1 d^1 + \mu_2 d^2; \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \geq 0\} \quad (1)$$

$$\{\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \mu_3 d^3, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \mu_3 \geq 0\} \quad (2)$$

$$\{x^1, x^2\} \quad (3)$$

(4) مسئله جواب بهینه ندارد.

۱۱۸- مسئله زیر مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= cx \\ \text{s.t. } Ax &\leq b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

فرض کنید  $B$  پایه بهینه،  $c_B$  بردار ضریب متغیرهای پایه‌ای در تابع هدف و  $z^*$  مقدار بهینه تابع هدف باشد. همچنین فرض کنید  $w^*$  مقدار بهینه مسئله زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max } w &= cx \\ \text{s.t. } Ax &\leq b + d \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

که در آن  $d \in \mathbb{R}^m$  بردار مفروض است. کدام مورد همواره درست است؟

$$w^* \leq z^* + c_B B d \quad (۱)$$

$$w^* \geq z^* + c_B B d \quad (۲)$$

$$w^* \leq z^* + c_B B^{-1} d \quad (۳)$$

$$w^* \geq z^* + c_B B^{-1} d \quad (۴)$$

۱۱۹- مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر مفروض است:

$$\begin{aligned} \text{Min } z_1 &= cx \\ \text{s.t. } Ax &\geq b \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

فرض کنید  $x^*$  جواب بهینه مسئله با مقدار  $z_1^* = cx^*$  باشد. اگر  $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$  و  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$  به‌طوری‌که  $A_1 x^* = b_1$  و  $A_2 x^* > b_2$ ، آنگاه برای مسئله زیر، کدام مورد درست است؟ ( $z_2^*$  مقدار بهینه مسئله زیر است).

$$\begin{aligned} \text{Min } z_2 &= cx \\ \text{s.t. } A_1 x &\geq b_1 \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

$$(۱) \quad x^* \text{ جواب بهینه نیست و } z_2^* < z_1^*.$$

$$(۲) \quad x^* \text{ جواب بهینه است و } z_2^* < z_1^*.$$

$$(۳) \quad x^* \text{ جواب بهینه نیست و } z_2^* = z_1^*.$$

$$(۴) \quad x^* \text{ جواب بهینه است و } z_2^* = z_1^*.$$

۱۲۰- جدول‌های آغازین و بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی خطی ماکزیم‌سازی به‌صورت زیر است. بزرگ‌ترین بازه

تغییرات  $c_{x_3}$  (ضریب متغیر  $x_3$  در تابع هدف) برای آن که جواب بهینه تغییر نکند، کدام است؟

|       | z | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | RHS  |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
| z     | ۱ | -۳    | -۲    | -۵    | ۰     | ۰     | ۰     | ۰    |
| $s_1$ | ۰ | ۱     | ۲     | ۱     | ۱     | ۰     | ۰     | ۴۳۰  |
| $s_2$ | ۰ | ۰     | ۳     | ۱     | ۰     | ۱     | ۰     | ۴۶۰  |
| $s_3$ | ۰ | ۱     | ۴     | ۰     | ۰     | ۰     | ۱     | ۴۲۰  |
| z     | ۱ | ۲     | ۸     | ۰     | ۵     | ۰     | ۰     | ۲۱۵۰ |
| $x_3$ | ۰ | ۱     | ۲     | ۱     | ۱     | ۰     | ۰     | ۴۳۰  |
| $s_2$ | ۰ | -۱    | ۱     | ۰     | -۱    | ۱     | ۰     | ۳۰   |
| $s_3$ | ۰ | ۱     | ۴     | ۰     | ۰     | ۰     | ۱     | ۴۲۰  |

- جدول آغازین
- (۱)  $[0, +\infty)$
- (۲)  $[3, +\infty)$
- (۳)  $[0, 5]$
- (۴)  $[3, 5]$

جدول بهینه

۱۲۱- کدام مسئله دارای جواب یکتا نیست؟

$$(1) \quad y' = \sqrt{1-y^2} \quad \text{و} \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$(2) \quad y' = |y| \quad \text{و} \quad y(0) = 0$$

$$(3) \quad y' = |y|^2 \quad \text{و} \quad y(0) = 0$$

$$(4) \quad y' = \max\{1, -y\} \quad \text{و} \quad y(0) = 1$$

۱۲۲- فرض کنید  $(\lambda_i, \phi_i(t))$ ,  $(i=1, 2, \dots)$  جفت (زوج) ویژه مسئله مقدار کرانه‌ای

$$(p(t)x')' + \lambda q(t)x = 0; t \in [a, b] \quad x(a) = x(b) = 0 \quad \text{باشد. کدام مورد درست است؟}$$

$$(1) \quad \int_a^b p(t)\phi_1(t)\phi_2(t)dt = 0 \quad \text{آنگاه, } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$(2) \quad \int_a^b q(t)\phi_1(t)\phi_2(t)dt = 0 \quad \text{آنگاه, } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$(3) \quad \text{اگر } p(t) > 0, (i=1, 2, \dots) \quad \text{آنگاه, } \lambda_i > 0$$

$$(4) \quad \int_a^b q(t)\phi_i^2(t)dt = 0 \quad \text{آنگاه, } \lambda_i \neq 0$$

۱۲۳- نقطه تعادل دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر (۱, ۲) است. مقدار  $a+b$  کدام است؟

$$\begin{cases} x' = x + 3y + a \\ y' = x - y + b \end{cases}$$

$$(1) \quad -6$$

$$(2) \quad -4$$

$$(3) \quad 4$$

$$(4) \quad 6$$

۱۲۴- به‌ازای کدام مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  دستگاه معادلات زیر همبسته است؟

$$\begin{cases} x' = \alpha x + y \\ y' = -2x + \beta y \end{cases}$$

$$(1) \quad \beta = \alpha = 1$$

$$(2) \quad \beta = 2 \quad \text{و} \quad \alpha = -1$$

$$(3) \quad \beta = -1 \quad \text{و} \quad \alpha = 2$$

$$(4) \quad \beta = 1 \quad \text{و} \quad \alpha = -1$$

۱۲۵- مسئله شکار و شکارچی  $\begin{cases} x' = 2x - 3xy \\ y' = 4x + 2xy \end{cases}$  را در نظر بگیرید. اگر  $x(t)$  و  $y(t)$  جواب  $T$ -متناوب مسئله باشند،

$$\text{آنگاه مقدار } \int_0^T y(t)dt \quad \text{کدام است؟}$$

$$(1) \quad -2T$$

$$(2) \quad -\frac{1}{2}T$$

$$(3) \quad \frac{2}{3}T$$

$$(4) \quad \frac{3}{2}T$$

احتمال (۱ و ۲) و فرایندهای تصادفی ۱:

۱۲۶- از جعبه‌ای که ۳ مهره سیاه و ۴ مهره سفید دارد، مهره به‌طور تصادفی و با جایگذاری بر می‌داریم تا برای اولین بار سفید انتخاب شود. احتمال اینکه تعداد دفعات لازم برای انتخاب مهره تا مشاهده اولین مهره سفید عددی فرد باشد، چقدر است؟

$$\frac{3}{10} \quad (1)$$

$$\frac{4}{10} \quad (2)$$

$$\frac{7}{10} \quad (3)$$

$$\frac{9}{10} \quad (4)$$

۱۲۷- فرض کنید  $X$  دارای توزیع تجمعی  $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$  باشد. مقدار  $E[F^2(X)(1-F(X))^3]$  چقدر است؟

$$\frac{1}{100} \quad (1)$$

$$\frac{1}{30} \quad (2)$$

$$\frac{1}{60} \quad (3)$$

$$\frac{1}{50} \quad (4)$$

۱۲۸- متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع احتمال زیر است که در آن  $\frac{1}{4} \leq \theta \leq 1$  است. کمترین مقدار واریانس به‌ازای چه

مقداری از  $\theta$  حاصل می‌شود؟

| $x$      | -۱                 | ۰          | ۱                  |
|----------|--------------------|------------|--------------------|
| $P(X=x)$ | $\frac{\theta}{2}$ | $1-\theta$ | $\frac{\theta}{2}$ |

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۱۲۹- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر صحیح نامنفی و تابع مولد احتمال آن به صورت  $G(t) = \frac{4}{4-t}$  باشد،

مقدار  $P(X=1)$  چقدر است؟

(۱)  $\frac{3}{4}$

(۲)  $\frac{2}{3}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $\frac{1}{4}$

۱۳۰- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین  $\mu$  و واریانس  $\sigma^2 = 3$  باشد. اگر  $E(e^X) = 1$  باشد مقدار  $\mu$

کدام است؟

(۱)  $-3$

(۲)  $-\frac{3}{2}$

(۳)  $-\frac{1}{2}$

(۴)  $-1$

۱۳۱- فرض کنید  $X \sim N(0, 3)$  باشد. مقدار  $E(X^3 e^{X^2})$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $-1$

(۳)  $1$

(۴) وجود ندارد.

۱۳۲- تعداد ماهی‌ها در یک دریاچه مشخص یک متغیر تصادفی پواسون با پارامتر  $\lambda$  است. برای اطمینان از وجود ماهی،

یک ماهی به دریاچه اضافه می‌کنیم. فرض کنید  $Y$  تعداد ماهی‌های حاصل شده باشد.  $E(Y^2)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{\lambda^2}{2}$

(۲)  $(\lambda+1)^2$

(۳)  $\lambda^2 + 2\lambda$

(۴)  $\lambda^2 + 2\lambda + 1$

۱۳۳- فرض کنید  $X \sim U(0,1)$ ، واریانس  $Y = \ln \sqrt{\frac{1}{1-X}}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{8}$

(۲)  $\frac{1}{6}$

(۳)  $\frac{1}{4}$

(۴)  $\frac{1}{2}$

۱۳۴- مصرف روزانه آب (برحسب میلیون لیتر) در یک شهر، یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمالی زیر است. احتمال اینکه در روز مشخصی، مصرف آب بیش از ۷ میلیون لیتر شود، چقدر است؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x-5) & 5 \leq x < 6 \\ \frac{1}{3}(8-x) & 6 \leq x < 8 \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

(۱)  $\frac{1}{6}$

(۲)  $\frac{1}{3}$

(۳)  $\frac{2}{3}$

(۴)  $\frac{5}{6}$

۱۳۵- فرض کنید دنباله  $X_n$  از متغیرهای تصادفی مستقل دارای توزیع دو جمله‌ای  $\text{Bin}(n, \frac{1}{n})$  باشد. مقدار

$\lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{-X_n})$  کدام است؟

(۱)  $e^{-1}$

(۲)  $e^{-2}$

(۳)  $e^{e^{-1}-1}$

(۴)  $e^{e^{-1}}$

۱۳۶- فرض کنید  $(X, Y)$  دارای چگالی توأم زیر باشد. میانه متغیر تصادفی  $Y$  چقدر است؟

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, \quad x < y < 1+x \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

(۱)  $\frac{1}{2}$

(۲) ۱

(۳)  $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

۱۳۷- فرض کنید  $X$  دارای توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda = 2$  و  $y = 0, 1, \dots, x$

$$P(Y = y | X = x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & y = 0, 1, \dots, x \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$E[Y]$  کدام است؟

(۱) ۱

(۲)  $\frac{1}{2}$

(۳)  $\frac{1}{3}$

(۴)  $\frac{1}{4}$

۱۳۸- فرض کنید  $X + Y = 4X - 3$ ، ضریب همبستگی  $X$  و  $Y$  چقدر است؟

(۱) -۱

(۲)  $-\frac{1}{3}$

(۳)  $+\frac{1}{3}$

(۴) +۱

۱۳۹- اگر  $X_1$  و  $X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل دارای توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{4}$  باشند، مقدار  $E\left(\frac{X_1 + 3X_2}{5X_1 + 5X_2}\right)$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{5}$

(۲)  $\frac{2}{5}$

(۳)  $\frac{3}{5}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

۱۴۰- فرض کنید زنجیره مارکوف  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  با فضای حالت  $\{0, 1, 2\}$  و ماتریس انتقال زیر داده شده است:

$$P = \begin{bmatrix} 0/5 & 0/5 & 0 \\ 0/3 & 0/2 & 0/5 \\ 0 & 0/4 & 0/6 \end{bmatrix}$$

اگر  $P(X_0 = 0) = 1$  باشد، احتمال  $P(X_2 = 2)$  کدام است؟

(۱) ۰/۲۵

(۲) ۰/۳۵

(۳) ۰/۵۵

(۴) ۰/۶۰

۱۴۱- فرض کنید  $\{N(t), t \geq 0\}$  یک فرایند پواسن همگن با نرخ  $\lambda = 4$  باشد. اگر بدانیم در بازه  $[0, 2]$  دقیقاً ۳ رویداد رخ داده است، احتمال اینکه در بازه  $[0, 1]$  دقیقاً ۲ رویداد رخ داده باشد، چقدر است؟

$$\frac{1}{8} \quad (1)$$

$$\frac{2}{8} \quad (2)$$

$$\frac{3}{8} \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} \quad (4)$$

۱۴۲- فرض کنید  $\{X_n : n \geq 0\}$  یک فرایند گام برداری تصادفی ساده با  $X_0 = 0$  است که در هر گام با احتمال  $\frac{1}{3}$  یک واحد به راست و با احتمال  $\frac{2}{3}$  یک واحد به چپ حرکت می کند. مقدار  $P(X_6 > 0)$  کدام است؟

$$\frac{73}{729} \quad (1)$$

$$\frac{1}{729} \quad (2)$$

$$\frac{12}{729} \quad (3)$$

$$\frac{103}{729} \quad (4)$$

۱۴۳- فرض کنید  $\{N(t) : t \geq 0\}$  یک فرایند پواسون با نرخ  $\lambda = 5$  باشد. اگر  $T_1$  زمان اولین رخداد باشد، مقدار  $\text{Var}(T_1 | N(3) = 1)$  چقدر است؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

۱۴۴- در یک زنجیره مارکف اگر احتمال گذار از حالت  $i$  به حالت  $j$  در دقیقاً  $n$  قدم، مثبت باشد و همچنین احتمال گذار از حالت  $j$  به حالت  $i$  در دقیقاً  $m$  قدم، مثبت باشد، در مورد حالت های  $i$  و  $j$  کدام مورد درست است؟  
 (۱) هر دو نه گذرا و نه بازگشتی هستند.  
 (۲) یا هر دو گذرا و یا هر دو بازگشتی هستند.  
 (۳) هر دو بازگشتی هستند اما گذرا نیستند.  
 (۴) هر دو گذرا هستند اما بازگشتی نیستند.

۱۴۵- فرض کنید  $\{N(t) : t \geq 0\}$  یک فرایند پواسون با نرخ  $\lambda = 4$  باشد. مقدار  $E\left[N\left(\frac{3}{4}\right) \middle| N\left(\frac{1}{4}\right) = 1\right]$  چقدر است؟

$$1 \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$3 \quad (3)$$

$$4 \quad (4)$$